(H到至到达讲稿)(12110116 赵应南)

$\mathbb{N}^*$ 上定义的实值或复值

(数论函数与 Dirichlet 乘积)

$(1-1)^k=0$

Möbius 函数 $\longrightarrow \sum_{d|n}\mu(d)=\left[\frac{1}{n}\right]$

$\begin{cases}\mu(1)=1\\ \mu(n)=(-1)^k,\ 0 \quad (n>1)\end{cases}$

$\alpha_1=\dots=\alpha_k=1$

$\mu * u = I$

互为逆

$N: N(n)=n$

f, g 数论函数，规定 $h(n)=\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = f*g(n)$

交换，结合

$I(n)=\left[\frac{1}{n}\right] \to$ 单位元

$u(n)=1$

逆元：f 数论函数，$f(1)\neq 0$ 则存在唯一 Dirichlet 逆函数 f^{-1}.

$$f^{-1}(1)=\frac{1}{f(1)},\ f^{-1}(n)=\sum_{\substack{d|n\\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d)\cdot\frac{-1}{f(1)} \quad (n>1)$$ (给出归纳构造 $\leftarrow$ 解方程)

"$f\,(f(1)\neq 1)$" 构成 Abel 群 $\longrightarrow$ Möbius 反演(反转)

数论函数

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n)=\sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

pf: $f=g*u \Leftrightarrow g=f*\mu \quad (\mu*u=I)$

$A\subset\mathbb{Z},\ A_d=\{x: d|x,\ x\in A\}$

$p_1\sim p_m$ m 个不同素数

给 $e(j)<p_j$ 个 $C_{j,i}$ $i\in[\![1,e(j)]\!]$ 不同剩余数

$\longmapsto$ 给出 $\sum_{j=1}^{n} e(j)$ 个剩余类去筛去 $A\mapsto A^*$

例子：$N\geq 9$，$A=\{a: a\in[\![2,N]\!]\}$，$p_1=2, p_2,\dots,p_m$ 为 $1\sim\sqrt{N}$ 中素数

$e(1)=1,\ C_{1,1}=0,\ \underset{j\in[\![2,m]\!]}{e(j)=2},\ C_{j,1}=0,\ C_{j,2}=2.$

若能证明 $|A^*|>0$ 对任意大的 N 则孪生素数无穷对.

def: $|A|<+\infty$, $\mathcal{P}\subseteq\mathbb{P}$. $2\le w\le z$, $P(w,z)=\prod_{\substack{w\le p<z\\ p\in\mathcal{P}}} p$, $P(z)=P(2,z)$

称 $S(A;\mathcal{P},z)=\sum_{\substack{a\in A\\(a,P(z))=1}} 1$ 为筛函数.

$\sum_{a\in A}\eta_2((a,P(z)))\le S(A;\mathcal{P},z)\le\sum_{a\in A}\eta_1((a,P(z)))$

(引进 $R(z)$)

prop: ① $S(A;\mathcal{P},2)=|A|$

② 关于 z 非实递减

可用 η_1,η_2 去夹

③ $S(A;\mathcal{P},z)=\sum_{a\in A}\sum_{d\mid(a,P(z))}\mu(d)$

$\begin{cases}\eta_1(1)=\eta_2(1)=1\\ \eta_2(n)\le\sum_{d\mid n}\mu(d)=[\frac{1}{n}]\le\eta_1(n)\end{cases}$

(Eyxura 6) $2\le w\le z$, 有

(有小于 z 的素因子 p 中)

$|A|=S(A;\mathcal{P},z)+\sum_{p\mid P(z)}S(A_p;\mathcal{P},p)$ ← 按照最小素因子 p 划分

(没有小于 z 的素因子中)

($S(A_p;\mathcal{P},p)$: A 中被 p 整除, 被小于 p 的筛去)

进一步有: $S(A;\mathcal{P},z)=S(A;\mathcal{P},w)-\sum_{p\mid P(w,z)}S(A_p;\mathcal{P},p)$

取 A 为 $S(A;p,w)$

$\mathcal{P}_K=\{p\in\mathbb{P}: p\nmid K\}$, $\mathcal{P}_1=\mathbb{P}$

(Eratosthenes 筛法) $S(A;\mathcal{P},z)\overset{③}{=}\sum_{d\mid P(z)}\mu(d)|A_d|$

使其变得积性

$X = X(A)$

$r_d=|A_d|-(\rho(d)/d)|A|$

$\Rightarrow S(A;\mathcal{P},z)=X\sum_{d\mid P(z)}\mu(d)\frac{\rho(d)}{d}+R(z)$

$(\frac{\rho(d)}{d})|A|$ 代替 $|A_d|$

$=XW(z)+R(z)$

$\rho(p)<p$, $p\in\mathcal{P}$

定义在 $\mu(d)\ne0$, $(d,\overline{\mathcal{P}})=1$ 的非负积性函数

$$W(z)=\prod_{p\mid P(z)}\left(1-\frac{\rho(p)}{p}\right)$$ (运用了 ρ 的积性)

$$R(z)=\sum_{d\mid P(z)}\mu(d)r_d$$

定理1：$A_0>0$，$\pi'(z)=\{p\in\mathcal{P}:p<z\}$

条件：$|r_d|\leq\rho(d)$，$\mu(d)\neq0$，$(d,\bar{p})=1$

$\rho(p)\leq A_0$，$p\in\mathcal{P}$

则有：$R(z)=\theta(1+A_0)^{\pi'(z)}$，$|\theta|\leq1$

不过这个在 z 较大时便很大，故只对于 $z\ll X$ 才有价值

Pf：$$|R(z)|\leq\sum_{d\mid P(z)}|r_d|\leq\sum_{d\mid P(z)}A_0^{\nu(d)}=\prod_{p\mid P(z)}(1+A_0)=(1+A_0)^{\pi'(z)}$$ (素因子个数的函数)

$A\to X$，$P\to\rho(d)$ $\Rightarrow$ $X(q)=(\rho(q)/q)X$ (其实就是取同个 ρ)

$\rho(d;q)=\rho(d)$，$\mu(qd)\neq0$，$(qd,\bar{p})=1$

$\Rightarrow r_d(q)=r_{dq}$，$\mu(dq)\neq0$，$(qd,\bar{p})=1$

有 $$S(A(q),p(q),z)=(\rho(q)/q)X\,W(z;q)+R(z;q)$$

$$W(z;q)=\prod_{p\mid P(z),\,p\nmid q}\left(1-\frac{\rho(p)}{p}\right),\qquad R(z;q)=\sum_{\substack{d\mid P(z)\\(d,p)=1}}\mu(d)r_{dq}$$

(运用 Eyxurra 6)

可信出 $W(z)$，$R(z)$ 的表达

例子：$Z(x,h) \leq S(A^{(3)}; P, z) + \pi(z)$

$$A^{3}(x,h) = \{a : a = n(n-h),\ 1 \leq n \leq x\}$$

用于Burn筛

只需证明解数函数积性⇒作带余除法即可　$X = x$. $\rho(d) = \delta(d) = 2^{w(d)}$

$\pi(x)$上界：(Eratosthenes筛法的缺点体现)

$$\pi(x) \leq S(A^{(2)}; P, z) + \pi(z)$$

取$x=y$即可

$$X = x,\ \rho(d) = 1 \longrightarrow \pi(x) \leq x \prod_{p<z}(1-p^{-1}) + \underbrace{\theta \cdot 2^{\pi(z)}}_{\text{太大了}} + \pi(z)$$

Burn最简运用：

$$S(A; P, z) = XW(z)\{1 + \theta_1 (\lambda e^{1+\lambda})^{(A_0 A_1 \lambda^{-1})(1+\log\log z)}\}$$

$$+ \theta_2 \exp\{(1 + A_0 A_1 \lambda^{-1})(1+\log\log z)) \log z\}$$

(P711 推导最后一步)

$$\sum_{t|P(z)} \eta(t)\frac{\rho(t)}{t}\sum_{et|P(z)}\mu(e)\frac{\rho(e)}{e} = W(z)\sum_{t|P(z)}\eta(t)g(t)$$

pf: $$\mathrm{RHS} = \left[\sum_{t|P(z)}\eta(t)\frac{\rho(t)}{t}\prod_{p|t}\left(1-\frac{\rho(p)}{p}\right)^{-1}\right]\left[\sum_{d|P(z)}\mu(d)\frac{\rho(d)}{d}\right]$$

考虑证: $$\frac{\rho(t)}{t}\prod_{p|t}\left(1-\frac{\rho(p)}{p}\right)^{-1}\cdot\sum_{d|P(z)}\mu(d)\frac{\rho(d)}{d} = \left(\sum_{et|P(z)}\mu(e)\frac{\rho(e)}{e}\right)\cdot\frac{\rho(t)}{t}$$ (固定 t)

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{d|P(z)}\mu(d)\frac{\rho(d)}{d}}{\sum_{d|\frac{P(z)}{t}}\mu(d)\frac{\rho(d)}{d}} = \prod_{p|t}\left(1-\frac{\rho(p)}{p}\right)$$ (联想 $\varphi(n)$ 的性质)

分子 $= \prod_{d|P(z)}\left(1-\frac{\rho(d)}{d}\right)$

分母 $= \prod_{d|\frac{P(z)}{t}}\left(1-\frac{\rho(d)}{d}\right)$

由于 $P(z)=\prod p$ 故有为 t 因子的贡献

(P713)

$$\sum_{k d|P(z)}\ \sum_{g|P(p(d))}\mu(d)\theta(d)S(A_{dg};P,g)$$

$P(p(d))$: 最小素因子之下的所有素积

$p(d)$: $\min_{p|d}(p),\ d>1 \Rightarrow d$ 中最小素因子

$d = \prod p_j \leftarrow d|P(z)$

(当 $g|P(p(d_1))$)

令 $e = dg \Rightarrow p(e) = g$

$\mathscr{A}^*$. 显然，$\mathscr{A}^*$是由$\mathscr{A}$中所有这样的元素所组成：它不属于由式(1)给出的任何一个剩余类．这里，由式(1)给出的一组剩余类好象起了一个“筛子”的作用，凡是属于其中某一个剩余类的数就要被这“筛子”筛去．所以，这一挑选过程很自然地被称为筛法．

选取不同的数列和“筛子”，通过以上的筛选过程得到的子序列往往会有许多有趣的性质．例如：

(a) 设整数 $N\geqslant 9$, $\mathscr{A}=\{a:\ 2\leqslant a\leqslant N\}$, $p_1=2, p_2, \cdots, p_m$ 为所有不超过 $\sqrt{N}$ 的素数，以及 $e(j)=1(1\leqslant j\leqslant m)$, $C_{j,1}=0$ $(1\leqslant j\leqslant m)$．这时，筛选后得到的数列$\mathscr{A}^*$就是不超过 N 且大于 $\sqrt{N}$ 的素数，其个数为 $\pi(N)-\pi(\sqrt{N})$．这就是最古老的 Eratosthenes 筛法．

⇒ $p\not\equiv 0,2 \pmod{p_j}$, $j\geqslant 2$　(√N 的设计有意思)
⇒ p为√N~N中素且p-2也为√N~N中素

p不为偶个

(b) 如果在例(a)中取剩余类集合(即筛子)为：$e(1)=1$, $C_{1,1}=0$; $e(j)=2(2\leqslant j\leqslant m)$, $C_{j,1}=0$, $c_{j,2}=2$，那末经过这样的筛选后得到的数列$\mathscr{A}^*$由$\mathscr{A}$中所有这样的元素 a 组成：a 和 $a-2$ 都是不超过 N 且大于 $\sqrt{N}$ 的素数．如果能够证明对任意大的 N 均有 $|\mathscr{A}^*|>0$，那末就证明了孪生素数有无穷多对．

(c) 设 N 是正整数，$\mathscr{A}=\{a:\ 1\leqslant a\leqslant N\}$，$p_1, \cdots, p_m$ 是所有整除 N 的素数，$e(j)=1$, $C_{j,1}=0(1\leqslant j\leqslant m)$．这时，$\mathscr{A}^*$就是由不超过 N 且和 N 互素的正整数所组成的子序列，其个数即为 $\varphi(N)$．熟知，用这种方法可以推出 $\varphi(N)$

$$=N\prod_{p\mid N}(1-p^{-1}).$$

以上例子表明，**筛法**是可以用来从某个给定的数列中取出具有某种同余性质的子序列的一种算法，它和数论问题有着很自然的联系．对具体的数列(如取 $N=10^2, 10^3, 10^4, 10^5$)可很快地确定它有没有具有某种性质的数，以及有多少．这种一般形式的原始筛法在数值应用中是十分灵活有效的，但要在理论上进行讨论却很不方便．后来，通过引进筛函数的概念，使筛法有了一个易于研究的形式．

定义　设$\mathscr{A}$是一个有限整数数列，$\mathscr{P}$是一个素数集合．再设

$2x^{\frac{1}{2}}$：$n(n-h)$总有一个小于x，故带$x^{\frac{1}{2}}$即可

h负时取等

而对于大于x的那个：可能为$(kx^{\frac{1}{2}})^2=k^2x$太大，取$k^2>2$即可（因为$|n-h|\le|n|+|h|\le 2x$）

(P8型)

例 3． 设 h 为给定的偶数，$x\geqslant|h|>0$，以 $Z(x,h)$ 表这样的正整数 n 的个数：$n\leqslant x$，n，$|n-h|$ 均为素数．再设 $\mathscr{A}^{(3)}=\mathscr{A}^{(3)}(x,h)=\{a:a=n(n-h),1\leqslant n\leqslant x\}$．那末，对任意的 $z\geqslant 2$ 有

补n,n-h两个（主要是当时去可能：恰是$\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}$型素数时多（x如大可把2加回））

$$S(\mathscr{A}^{(3)};\mathscr{P}_1,2x^{1/2})-\boxed{2}\leqslant Z(x,h)\leqslant S(\mathscr{A}^{(3)};\mathscr{P}_1,z)+\pi(z).\tag{11}$$

↳可以改进为$\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}$

显然，$Z(x,2)$ 即为不超过 x 的孪生素数的对数．

例 4． 设偶数 $N\geqslant 6$． 以 $D(N)$ 表示 N 表为两个素数之和的表法个数[1]．再设 $\mathscr{A}^{(4)}=\mathscr{A}^{(4)}(N)=\{a:\ a=n(N-n),\ 1\leqslant n\leqslant N\}$．那末，对任意的 $z\geqslant 2$ 有

但它们均为素数

$$S(\mathscr{A}^{(4)};\mathscr{P}_1,N^{1/2})-2\leqslant D(N)\leqslant S(\mathscr{A}^{(4)};\mathscr{P}_1,z)+2\pi(z).\tag{12}$$

这个例由于正定，各小于N，取$N^{\frac{1}{2}}$即可

例 5． 设 $x,h,Z(x,h)$ 由例 3 给出，$\mathscr{A}^{(5)}=\mathscr{A}^{(5)}(x,h)=\{a:a=p-h,p\leqslant x\}$． 那末，对任意的 $z\geqslant 2$ 有

$$S(\mathscr{A}^{(5)};\mathscr{P}_1,2x^{1/2})-2\leqslant Z(x,h)\leqslant S(\mathscr{A}^{(5)};\mathscr{P}_1,z)+\pi(z).\tag{13}$$

此外，容易看出

因为$g|h$，$g|p-h\Rightarrow g|p\Rightarrow g=p$（用了$g|h$的个数$\omega(h)$控制）

$$S(\mathscr{A}^{(5)};\mathscr{P}_1,z)=S(\mathscr{A}^{(5)};\mathscr{P}_h,z)+O(\omega(h)).\tag{14}$$

例 6． 设 N，$D(N)$ 由例 4 给出，$\mathscr{A}^{(6)}=\mathscr{A}^{(6)}(N)=\{a:a=N-p,p\leqslant N\}$． 那末对任意的 $z\geqslant 2$，有

$$S(\mathscr{A}^{(6)};\mathscr{P}_1,N^{1/2})-1\leqslant D(N)\leqslant S(\mathscr{A}^{(6)};\mathscr{P}_1,z)+\pi(z).\tag{15}$$

同样容易看出

$$S(\mathscr{A}^{(6)};\mathscr{P}_1,z)=S(\mathscr{A}^{(6)};\mathscr{P}_N,z)+O(\omega(N)).\tag{16}$$

以上例子清楚地表明，一些数论问题可转化为寻求筛函数 $S(\mathscr{A},\mathscr{P},z)$ 的上界估计和正的下界估计．简单说来，这就是筛法理论的基本问题．应该指出，在每个例子中考虑的序列并不是一个固定的序列，而是依赖于和所讨论的问题有关的一个或若干个参数．

1）若素数 $p\neq p'$，则 $N=p+p'=p'+p$ 看作是两种不同的表法．

$$\pi(x) \leqslant x \prod_{p<z}(1-p^{-1}) + \theta \cdot 2^{\pi(z)} + \pi(z). \tag{42}$$

利用

$$\prod_{p<z}(1-p^{-1})^{-1} = \prod_{p<z}(1+p^{-1}+p^{-2}+\cdots) > \sum_{n<z} n^{-1}$$

$$> \int_1^{[z]+1} \frac{du}{u} > \log z, \tag{43}$$

及显然估计 $\pi(z)<z$，从式(42)得

$$\pi(x) < x/\log z + 2^z + z. \tag{44}$$

当取 $z \geqslant (\log x)/(\log 2)$ 时，$2^z \geqslant x$，误差项就超过了主要项，因而从上式就不可能得到 $\pi(x)$ 的非显然上界估计．若取 $z=\log x$，从上式就得到

$$\begin{aligned}\pi(x) &< x/(\log\log x) + x^{0.7} + \log x \\ &\ll x/(\log\log x).\end{aligned} \tag{45}$$

而这比熟知的初等结果 $\pi(x) \ll x/\log x$ 差很多．这一例子清楚地表明：利用定理 1（即 Eratosthenes 筛法），在很强的条件(39)和(40)下，也不能得到有重要理论价值的结果．

从证明可以看出，定理 1 的缺点是误差项 $R(z)$ 中的项数太多，达 $2^{\pi(z)}$ 项；而这一点是由于我们直接交换式(5)右边的求和号后，从式(17)来讨论筛函数所引起的．

对于任意算术函数 $\eta_1(n)$，$\eta_2(n)$，若满足[1)]

$$\begin{cases} \eta_1(1) = \eta_2(1) = 1, \\ \eta_2(n) \leqslant \sum\limits_{d\mid n} \mu(d) = \left[\dfrac{1}{n}\right] \leqslant \eta_1(n), \end{cases} \tag{46}$$

那末，由式(5)可得

$$\sum_{a\in\mathscr{A}} \eta_2((a, p(z))) \leqslant S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, z) \leqslant \sum_{a\in\mathscr{A}} \eta_1((a, p(z))). \tag{47}$$

显然，为使不等式(47)对任意的 $\mathscr{A}$, $\mathscr{P}$, z 都成立，条件(46)的第

1) 为了得到尽可能好的上、下界估计，当然要求 $\eta_1(n)$，$\eta_2(n)$ 和 $\sum\limits_{d\mid n}\mu(d)$ 的差尽可能地小，因此，我们总要求 $\eta_1(1)=\eta_2(1)=1$．

$$g(t)=\frac{\rho(t)}{t}\prod_{p\mid t}\left(1-\frac{\rho(p)}{p}\right)^{-1},\mu(t)\neq 0,(t,\overline{\mathscr{P}})=1. \quad (6)$$

由式(4)及(5)就得到

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z,\eta)=XW(z)\sum_{t\mid P(z)}\eta(t)g(t)+\sum_{d\mid P(z)}\mu(d)\theta(d)r_d. \quad (7)$$

如果我们这样来构造 θ(即 η)：(a) 设 ξ 为一参数，当 $d\geqslant\xi$ 时必有 $\theta(d)=0$；或(b) 设正整数 k 为一参数，当 $\omega(d)\geqslant k$ 时必有 $\theta(d)=0$ [1)],那末就可以达到控制余项 $\sum_{d\mid P(z)}\mu(d)\theta(d)r_d$ 中的项数的目的. 由式(1)知为使 $\eta(1)=1$，应有 $\theta(1)=1$. 更重要的是要确定 θ_1，θ_2 满足什么样的条件时，能保证不等式(1.47)(即式(1.46)的第二式)成立. 为此，我们先来证明下面的关系式.

定理 1 设 $\theta(1)=1$. 我们有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z,\eta)=S(\mathscr{A},\mathscr{P},z)-\sum_{1<d\mid P(z)}\mu(d)\left\{\theta\left(\frac{d}{p(d)}\right)\right.$$

$$\left.-\theta(d)\right\}S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d)), \quad (8)$$

其中

$$p(1)=+\infty;\quad p(d)=\min_{p\mid d}(p),\ d>1. \quad (9)$$

证：设 $d>1$，由式(1.6)(以 $\mathscr{A}_d$，$p(d)$ 代 $\mathscr{A}$,z) 可得(下面 q 为素数)：

$$|\mathscr{A}_d|=\sum_{q\mid P(p(d))}S(\mathscr{A}_{dq};\mathscr{P},q)+S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d)), \quad (10)$$

把上式代入式(3)得

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z,\eta)=|\mathscr{A}|+\sum_{1<d\mid P(z)}\mu(d)\theta(d)S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d))$$

$$+\sum_{1<d\mid P(z)}\sum_{q\mid P(p(d))}\mu(d)\theta(d)S(\mathscr{A}_{dq};\mathscr{P},q). \quad (11)$$

1) 以后将看到这两种办法基本上是一样的.

令 $dq=e$，当 $q\mid P(p(d))$ 时 $p(e)=q$. 所以上式右边第二个和式等于(注意 $\theta(1)=1$)

(μ(d)与μ(e)差个负号)

$$\sum_{e\mid P(z),\ \omega(e)\geqslant 2} -\mu(e)\theta(e/p(e))S(\mathscr{A}_e;\mathscr{P},p(e))$$

(补全为w(e)≥1)

$$=-\sum_{p\mid P(z)} S(\mathscr{A}_p;\mathscr{P},p)-\sum_{1<e\mid P(z)}\mu(e)\theta(e/p(e))\cdot S(\mathscr{A}_e;\mathscr{P},p(e)).$$

由以上两式及式(1.6)就推出所要的结果.

从式(8)看出，若以下条件成立：

$$\begin{cases}\theta_1(1)=\theta_2(1)=1, \\ (-1)^i\mu(d)\{\theta_i(d/p(d))-\theta_i(d)\}\geqslant 0, \\ d>1,\ d\mid P(z),\ i=1,2,\end{cases}\tag{12}$$

那末式(1.46)一定成立，即

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z,\eta_2)\leqslant S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)\leqslant S(\mathscr{A};\mathscr{P},z,\eta_1),\tag{13}$$

其中 η_i 由 θ_i 通过式(1)给出.

条件(12)是极弱的，因此难于进行讨论. 如果进一步限制 θ_i，使其满足：

$$\theta_i(1)=1;\text{当 } d\mid P(z)\text{ 时，}\theta_i(d)\text{ 仅取值 0 或 1},\ i=1,2;\tag{14}$$

$$\text{若 }\theta_i(d)=1,\ t\mid d,\text{ 则必有 }\theta_i(t)=1,\ i=1,2;\tag{15}$$

设 $1<d\mid P(z)$. 若 $\theta_i(d/p(d))=1,\mu(d)=(-1)^{i+1}$，

则必有

$$\theta_i(d)=1,\quad i=1,2^{1)},\tag{16}$$

那末，容易验证这时条件(12)的第二式一定成立. 因为，由条件(15) 知：当 $d>1$ 时

1) 这时一定有 $\theta_2(p)=1$，$p\mid P(z)$.

$$\theta_i(d/p(d)) - \theta_i(d) \geqslant 0, \quad i=1,2, \tag{17}$$

所以，当 $\mu(d)=(-1)^i$ 时式(12)的第二式成立；而当 $\mu(d)=(-1)^{i+1}$ 时，由条件(15)和(16)知，必有

$$\theta_i(d/p(d)) - \theta_i(d) = 0, \quad i=1,2, \tag{18}$$

所以这时式(12)的第二式也成立．这样，我们就证明了

定理 2 在条件(14)—(16)下，我们有

$$S(\mathscr{A}:\mathscr{P},z,\eta_i) = S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) +$$

$$(-1)^{i+1} \sum_{1<d\mid P(z)}^{(i)} S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d)),\ i=1,2, \tag{19}$$

其中“(i)”表示对满足以下的条件的 d 求和：

$$\omega(d) \equiv i \pmod 2, \quad \theta_i(d)=0, \theta_i(d/p(d))=1. \tag{20}$$

进而有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = X \sum_{d\mid P(z)} \mu(d)\theta_i(d)\frac{\rho(d)}{d}$$

$$+(-1)^i \sum_{1<d\mid P(z)}^{(i)} S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d)) + R_i(z),\ i=1,2, \tag{21}$$

其中

$$R_i(z) = \sum_{d\mid P(z)} \mu(d)\theta_i(d) r_d, i=1,2. \tag{22}$$

这里的式(21)是由式(4)和(19)直接推出．

至今的组合筛法就是构造满足条件(14)—(16)的算术函数 θ_i，进而也就确定了$\eta_i (i=1,2)$.一方面要求满足条件(20)的 d 一定很大，使得每个 $S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d))$都很小，以保证在忽略式(21)右边的第二个和式[1]，用 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z,\eta_i)$ 来估计 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 的上、下界时(即利用式(13))，产生的误差不大(见式(19))；另一方面，如前已说过的，要使得有尽可能多的 $d\mid P(z)$，满足 $\theta_i(d)=0$，以保证在估计 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z,\eta_i)$ 时，误差项 $R_i(z)$ 中的项数较少(见式

1）如果把这一和式也考虑进去，对每个 $S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d))$ 也进行估计，当然可期望得到好的结果，但将引起新的困难，情况变得极为复杂．

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z,\eta_i)=X\sum_{d|P(z),\omega(d)<k}\mu(d)\frac{\rho(d)}{d}+$$

$$\sum_{d|P(z),\ \omega(d)<k}\mu(d)r_d,\ i\equiv k\pmod 2,\tag{6}$$

及

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z,\eta_i)=XW(z)\left\{1+(-1)^{i-1}\sum_{t|P(z),\omega(t)\geqslant k}g(t)\binom{\omega(t)-1}{k-1}\right\}$$

$$+\sum_{d|P(z),\ \omega(d)<k}\mu(d)r_d,\quad i\equiv k\pmod 2.\tag{7}$$

由这种最简单的 Brun 筛法也可以得到筛函数 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 的渐近公式，但这里允许z相对于 X 的取值的数量阶要比定理 1.1 高得多.

定理 1 设 A_0, A_1 是两个正数. 如果条件(1.39)，(1.40)及

$$0\leqslant\rho(p)/p<1-A_1^{-1},\ p\in\mathscr{P}\tag{8}$$

成立，那末，对任意满足

$$0<\lambda e^{1+\lambda}<1\tag{9}$$

的正数 λ，当 $z\geqslant z_0=z_0(A_0)$ 时有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)=XW(z)\left\{1+\theta_1(\lambda e^{1+\lambda})^{(A_0A_1\lambda^{-1})(1+\log\log z)}\right\}$$

$$+\theta_2\exp\{(1+A_0A_1\lambda^{-1}(1+\log\log z))\log z\},\tag{10}$$

其中 $|\theta_1|\leqslant1$，$|\theta_2|\leqslant1$.

证：为证明式(10)，只要讨论式(7)右边的两个和式，并适当选取正整数 $k\geqslant2$. 由于 $g(t)$ 是正的积性函数，利用 $\binom{m-1}{n-1}\leqslant\binom{m}{n}$ 可得 ($\pi'(z)$ 同定理 1.1)

$$\sum_{t|P(z),\ \omega(t)\geqslant k}g(t)\binom{\omega(t)-1}{k-1}\leqslant\sum_{m=k}^{\pi'(z)}\binom{m}{k}\underline{\sum_{t|P(z),\ \omega(t)=m}g(t)}$$

$$\leqslant\sum_{m=k}^{\pi'(z)}\binom{m}{k}\underline{\frac{1}{m!}\Big(\sum_{p|P(z)}g(p)\Big)^m}$$

(LHS有的，RHS都有且刚算了 m! 次)

A 23 [redacted] [redacted] 甲乙解析数论基础

所以，在条件(21)下，定理 1 就给出了筛函数 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 的渐近公式. 从式(21)容易看出，这里 z 所允许取的值已经可以大于 $\log X$ 的任意次方，这比 Eratosthenes 筛法(定理 1.1)有了一定的改进；但也容易看出，这里 z 仍不能取 X^{δ}(不管 δ 多么小)那么大.可就是这样的改进,使 Brun 证明了下面的著名定理 —— 这是应用筛法所得到的第一个有重要理论价值的结果.

定理 2 由所有孪生素数的倒数组成的级数是收敛的.

证：以 $\mathscr{B}$ 表所有这样的素数组成的集合：对每个 $p\in\mathscr{B}$，$p-2$ 也是素数. 这样，定理就是要证明级数

$$\sum_{p\in\mathscr{B}}\frac{1}{p}=\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{19}+\cdots \tag{23}$$

收敛.为此,用定理 1 来估计不超过 x 的孪生素数的对数 $Z(x,2)$ 的上界. 由 §1 例 3 的式(1.11)($h=2$)知

$$Z(x,2)\leqslant S(\mathscr{A}^{(3)};\mathscr{P}_1,z)+\pi(z). \tag{24}$$

由式(1.27)，(1.28)知，当取 $A_0=2$，$A_1=3$ 时定理 1 的条件满足. 再取 $\lambda=1/4$(这时 $\lambda e^{1+\lambda}=0.87258\cdots$)及 $\varepsilon=1/50$，以及根据式(21)(注意这里 $X=x$)取

$$\log z=\frac{1}{25}\ \frac{\log x}{\log\log x}. \tag{25}$$

这样，由式(24)，(10)及(22)得(注意 $\rho(2)=1$)

$$\begin{aligned}Z(x,2)&\ll x\prod_{2<p<z}\left(1-\frac{2}{p}\right)+x^{49/50}\\&\ll x(\log\log x)^2(\log x)^{-2},\end{aligned} \tag{26}$$

最后一步用到了由Mertens 素数定理及式(25)所推出的

$$\prod_{2<p<z}\left(1-\frac{2}{p}\right)\leqslant\prod_{2<p<z}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\ll(\log z)^{-2}\ll\frac{(\log\log x)^2}{(\log x)^2}. \tag{27}$$

由式(26)即得

$$\sum_{p\in\mathscr{B}}\frac{1}{p}=\int_4^{\infty}\frac{Z(t,2)}{t^2}dt\ll\int_4^{\infty}\frac{(\log\log t)^2}{t(\log t)^2}dt<+\infty.$$

$$\|$$

$$\int_4^5+\int_5^7+\int_7^{13}+\cdots=0+1\cdot\frac{1}{t}\Big|_5^7+2\cdot\frac{1}{t}\Big|_7^{13}+3\cdot\frac{1}{t}\Big|_{13}^{19}+\cdots$$